

11 класс. Условия

Максимальное время выполнения заданий: 235 минут.

Все задания оцениваются из 7 баллов.

1. Даны натуральные числа n и m и функция $f(x) = \frac{x^2 - x}{2}$. Докажите, что существует такое натуральное число k , что

$$f(n) + f(m) + nm = f(k).$$

2. Автомат расфасовал 2026 конфет по 1000 коробкам (коробки могут быть пустыми). Конфеты были двух типов: шоколадные и мармеладные. Известно, что если в коробке есть шоколадная конфета, то там не больше одной мармеладной, а если в коробке есть мармеладная конфета, то там не больше одной шоколадной. Докажите, что есть коробка, в которой все конфеты одного типа.

3. Существуют ли такие пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e , что среди дробей $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{d}, \frac{c}{e}, \frac{d}{e}$ четыре сократимы, а шесть несократимы?

4. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Обозначим через T середину дуги BC описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что $AB = AP$. Докажите, что прямые TP и AD перпендикулярны.

5. В текстовом редакторе доступны лишь 13 букв. Любая последовательность букв является словом, каждое слово либо красивое, либо некрасивое. Известно, что для каждого натурального n в библиотеке слов редактора имеется ровно шесть n -буквенных некрасивых слов. Докажите, что в этом текстовом редакторе можно написать красивое слово из 2025 букв так, что, где бы ни поставить пробел, получатся два красивых слова.